



**Comparativo entre Soluções Analítica, Experimental e Numérica do
Resfriamento/Aquecimento de um Corpo Mediante Aplicação da Lei de Newton do
Resfriamento**

*Comparison between Analytical, Experimental and Numerical Solutions for the Cooling/Heating of a
Body Through the Application of Newton's Law of Cooling*

José Jefferson da Silva Nascimento^{1*}
Flávio Franklin Ferreira de Almeida^{2*}
João Victor Nunes de Sousa^{3*}
Rubilene Agra da Silva^{4*}
Maria Luiza Agra de Oliveira^{5*}
André Luiz Dantas Bezerra^{6*}
Bruna Thalita Alexandre Silva^{7*}
Bianca Thamires Alexandre Silva^{8*}

Resumo: Neste texto são apresentados resultados analíticos, experimentais e numéricos do aquecimento e resfriamento de corpos sujeitos à temperatura ambiente. A pesquisa teve como objetivo principal produzir e validar um algoritmo para solução numérica para esse tipo de problema. Como resultado, verificou-se que a Lei de Newton do Resfriamento modela adequadamente o comportamento da temperatura de um corpo enquanto é resfriado ou aquecido à temperatura ambiente, além de ter sido verificado também que o algoritmo produzido modela bem esse fenômeno.

Palavras-chave: Resfriamento, Aquecimento, Modelagem, Matemática, Experimental.

Abstract: In this text, analytical, experimental and numerical results of the heating and cooling of bodies subjected to ambient temperature are presented. The main objective of the research was to produce and validate an algorithm for numerical solution to this type of problem. As a result, it was found that Newton's Law of Cooling adequately models the temperature behavior of a body while it is cooled or heated to room temperature, and it was also verified that the algorithm produced models this phenomenon well.

Key Words: Cooling, Heating, Modeling, Mathematic, Experimental

¹ Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba. Atualmente é PROFESSOR TITULAR da Universidade Federal de Campina Grande e também docente e orientador de Doutorado no Programa de pós graduação em Engenharia de Processos. E-mail: jose.jefferson@professor.ufcg.edu.br

² Mestre em Economia da Empresa pela Universidade Federal da Paraíba-UFPA (2004). Aluno especial do Doutorado no Programa de Pós Graduação em Engenharia de Processos. E-mail: flavioalmeida@fiponline.edu.br

³ Mestre em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) Aluno especial do Doutorado no Programa de Pós Graduação em Engenharia de Processos. E-mail: joao.vns@hotmail.com

⁴ Graduada em administração pela UNIPÊ e Aluna especial do Doutorado no Programa de Pós Graduação em Engenharia de Processos. E-mail: rubileneagra@hotmail.com

⁵ Graduada em relações internacionais pela Universidade Federal da Paraíba (UFPA) e mestranda em gestão e sistemas agroindustriais pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) E-mail: marialuiza_agra@hotmail.com

⁶ Mestrado em sistemas agroindustriais, UFCG, Brasil, Doutorando em Engenharia de processo. UFCG. E-mail: dr.andreldb@gmail.com

⁷ Mestranda em Engenharia Mecânica pela UFCG. E-mail: engbrunathalita@gmail.com

⁸ Engenharia Mecânica pela UFCG. E-mail: biancathamires1@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

A Lei de Newton do Resfriamento é um princípio fundamental na física que descreve o comportamento térmico de um objeto em um ambiente que possui uma temperatura constante. Proposta pelo renomado físico Sir Isaac Newton, essa lei estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura do meio circundante. A formulação matemática dessa lei é uma ferramenta valiosa para o entendimento de fenômenos térmicos e é amplamente aplicável em diversas áreas, como engenharia e meteorologia.

Esta pesquisa busca explorar a Lei de Newton do Resfriamento, destacando suas aplicações práticas e apresentando uma implementação computacional eficiente utilizando a linguagem de programação Python. A capacidade de simular e resolver problemas térmicos através de algoritmos computacionais torna-se cada vez mais crucial, especialmente em um cenário onde a modelagem matemática e a simulação numérica desempenham um papel fundamental na análise de sistemas complexos.

No decorrer deste artigo, abordaremos em detalhes a formulação matemática da Lei de Newton do Resfriamento, discutindo suas implicações teóricas e práticas. Além disso, destacaremos casos de aplicação relevantes em situações do mundo real, onde a lei pode ser empregada para compreender e prever o comportamento térmico de objetos. Para ilustrar a aplicação prática da teoria, apresentaremos um algoritmo implementado em Python, demonstrando como é possível utilizar recursos computacionais para resolver problemas associados à Lei de Newton do Resfriamento.

Essa abordagem computacional não apenas oferece uma maneira eficiente de analisar sistemas térmicos, mas também proporciona um ambiente flexível para experimentação e visualização. Ao final deste artigo, espera-se que o leitor compreenda não apenas a teoria por trás da Lei de Newton do Resfriamento, mas também como aplicar esse conhecimento de maneira prática, utilizando ferramentas computacionais para resolver problemas do mundo real.

2. METODOLOGIA

Essa pesquisa teve como natureza uma revisão integrativa de literatura (RIL) se baseando em levantamentos bibliográficos de modo a revisar a literatura, com base em pesquisas anteriores obtendo conhecimentos e discutindo estudos teóricos a respeito do tema.

Considerando a projeção da pesquisa, tem-se a seguinte hipótese: Quando se expõe um corpo de temperatura TC (temperatura inicial do corpo) a um ambiente de temperatura TA (temperatura ambiente), de forma que $TC \neq TA$, nota-se que, após algum tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente, considerando o resfriamento/aquecimento do corpo, até a temperatura ambiente, seguindo assim, a modelagem física da Lei de Newton do

Resfriamento, Sendo assim, as palavras-chave utilizadas nesse processo foram: “cooling”, “heating”, “Modeling”, “Mathematics”, “Experimental”. Contudo foi utilizado como fonte de pesquisas bases de dados acadêmicas: (Scientific Electronic Library Online), Scielo, (Literatura Latino-Americana e do Caribe em Ciências da Saúde), Lilasc, (National Library of Medicina) PubMed, Livivo, conforme ABNT (Associação Brasileira de Normas e Técnicas).

O instrumento construído constará como uma tabela com título do artigo, periódico, autor, ano e principais resultados. O tratamento de dados foram seguidos de acordo com as seis fases do processo de elaboração da revisão sistemática de literatura, que discorre a seguir no quadro 1.

Quadro 1 – Etapas fundamentais da RIL

Etapas	Definição	Conduta a ser realizada
1º	Identificação do tema/problema	- Formação da hipótese ou questão de pesquisa - Identificar palavras chaves
2º	Estabelecimento de critérios de elegibilidade dos estudos e busca na literatura	- Uso de base de dados - Estabelecer critérios de exclusão e inclusão
3º	Categorização dos estudos	- Extração das informações - Organizar as informações
4º	Avaliação dos estudos	- Descrever criticamente os estudos apresentados
5º	Interpretação dos resultados	- Debate dos resultados - Cogitar recomendações
6º	Apresentação da RIL	- Produzir documentos que relata detalhadamente a revisão

Fonte: Sousa; Bezerra; Egypto (2023).

Os critérios de inclusão foram: artigos com texto completo, em português, entre 2022 e 2023, que correspondem a anos com recentes pesquisas.

Os critérios de exclusão foram: artigos repetidos entre as bases de dados, que não versassem sobre a temática, que não estava disponível gratuitamente, não se baseava de acordo com as palavras chaves ou não corroborem com os objetivos da pesquisa e em outras línguas.

Em se tratando de Riscos, foi realizada com ênfase no que diz respeito ao plágio de informações falsas obtidas nos respectivos sites, nos quais foram escolhidos para realização das pesquisas. Para que não ocorra esse tipo de constrangimento todas as citações feitas passaram por uma correção dos pesquisadores e em seguida troca de informações na qual visa adequar as falas ortográficas da melhor forma possível ocasionando assim um bom entendimento ao leitor de forma clara e objetiva.

Já os Benefícios, essa pesquisa disponibiliza de arcabouços no qual visam à interpretação de resultados no sentido de compreender as tendências e desafios no ensino do algoritmo no Python da matemática. Seleção dos artigos após uma busca inicial com descritores, foram encontrados 181 publicações sobre as temáticas no Scielo, Lilasc, PubMed, Livivo. Na segunda etapa, usando os filtros com os critérios de inclusão e exclusão, o quantitativo foi reduzido após leitura prévia dos títulos, resumos ou abstract, resultando um total de 13 artigos na amostra final apresentada no quadro 2.

Realizada a releitura de cada artigo, foram identificados para elaboração do quadro sintético contendo as seguintes informações: autor, ano da publicação, periódico e síntese dos resultados da pesquisa apresentados na seção dos resultados no quadro 3.

Para elaboração do algoritmo, foi utilizado o ambiente de desenvolvimento integrado para programação Visual Studio Code, versão 1.85.1, e o interpretador Python, versão 3.12.1. Para elaboração das equações e gráficos, foi utilizado o pacote Microsoft Office.

As buscas de dados foram feitas em sites disponíveis, separadas e salvas em uma pasta no computador, sendo transcritos e analisados individualmente.

Essa pesquisa trata-se de uma revisão integrativa, mediante uma pesquisa bibliográfica, tendo a inclusão de variados estudos e sendo respeitada todas as normas nacionais, diretrizes e bases.

Quadro 2: Buscas realizadas com as respectivas quantidades de acordo com a base de dados.

Bases de Dados	Nº de artigos encontrados	Nº de artigos filtrados para a pesquisa		%
SCIELO	0	0	0	0
LIVIVO	133	73,5	6	47
LILACS	0	0	0	0
PUBMED	48	26,5	7	53
TOTAL	181	100	13	100

Fonte: Dados de pesquisa em base de dados, 2023

No quadro 3 a seguir, será visto o resultado dos textos e autores que estão de acordo com o objetivo do trabalho em questão. Foram tomados por base os seguintes descritores: Cooling, Heating, Modeling, Mathematic, Experimental.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quadro 3: Buscas realizadas com as respectivas quantidades de acordo com a base de dados

País	Autor (es)	Título	Objetivos	Tipo de
------	------------	--------	-----------	---------

	e ano			documento
Rússia	Syrodoy et al. (2023)	Mathematical Modeling of the Evaporation of a Water Drop from a Heated Surface	Desenvolver um modelo matemático para calcular os processos de transferencia de calor e transferência de massa que ocorrem durante a evaporação dos fluidos aquecidos.	Artigo
Suíça	Abu-Zeid et al. (2023)	Experimental and Simulation Study of Solar-Powered Air-Gap Membrane Distillation Technology for Water Desalination	Investigar a polarização de temperatura (TP) e a polarização de concentração (CP), que afetam o desempenho do sistema de destilação por membrana de entreferro movido a energia solar (SP-AGMD) sob diversas condições de operação.	Artigo
Suíça	Vyazovkin; Galukhin (2022)	Problems with Applying the Ozawa–Avrami Crystallization Model to Non-Isothermal Crosslinking Polymerization	Identificar as dificuldades que podem surgir ao utilizar o modelo de Ozawa-Avrami na polimerização de reticulação sob condições não isotérmicas.	Artigo
Suíça	Radulescu et al. (2022)	Thermal Expansion of Plastics Used for 3D Printing	A medida que a utilização de componentes fabricados com polímeros através da impressão 3D aumenta, tornou-se essencial compreender as características térmicas desses materiais, o que engloba a análise da expansão térmica.	Artigo
United Kingdom	Hancox et al. (2022)	Heterotelechelic homopolymers mimicking high α – ultralow N block copolymers with sub-2 nm domain size	Evidenciar que uma coleção de homopolímeros heterotelequéricos do ácido poliacrílico pode imitar de maneira significativa o comportamento de auto organização e expansão de copolímeros, apresentando uma potencial solução para a busca constante por domínios menores na indústria de microeletrônicos.	Artigo
Estados Unidos	Madero-Castro et al. (2023)	On the Use of Water and Methanol with Zeolites for Heat Transfer	O objetivo é investigar o armazenamento de energia por meio da adsorção de água e metanol em zeólitas do tipo FAU, que possuem diferentes proporções de Si/Al (FAU) ^{55,56} , escolhendo o metanol como uma opção alternativa à água como fluido de trabalho convencional.	Artigo
Estados Unidos	Solanki.; Rabin	Thermo-mechanics aspects of	Introduzir uma estrutura computacional para analisar a criopreservação isocórica por meio de códigos comerciais de elementos finitos,	Artigo

	(2022)	isochoric cryopreservation: A new modeling approach and comparison with experimental data	destacando casos específicos que utilizam o software COMSOL Multiphysics.	
Suíça	Wang et al. (2023)	Modeling and Performance Analysis of a Pump-Driven Chip-Level Two-Phase Cooling System in Data Centers.	Analisar a dissipação de calor e o resfriamento ao nível de chip em centros de processamento de dados, para uma análise precisa do desempenho do sistema, identificando possíveis vias para otimização e orientação de futuras aplicações práticas.	Artigo
Suíça	Makahleh et al. (2022)	Modeling and Simulation of a Two-Stage Air Cooled Adsorption Chiller with Heat Recovery Part I: Physical and Mathematical Performance Model	Utilizar o programa MATLAB para criar um modelo e realizar simulações do desempenho de um refrigerador de adsorção de dois estágios em análise, investigando seu funcionamento tanto com e sem a recuperação de calor, utilizando um par de materiais composto por carvão ativado e metanol.	Artigo
Espanha	Marrakchi et al. (2023)	Experimental characterization, modelling and compensation of temperature effects in optotunable lenses	Propor um método experimental para avaliar quão significativas são as alterações na potência óptica devido a mudanças na temperatura interna a partir de três modelos matemáticos distintos para descrever como a lente responde a variações de temperatura, dar previsões das mudanças de temperatura interna ao usar a lente em diferentes intervalos de tempo	Artigo
Áustria	Staudt et al. (2023)	Control-oriented modeling of a LiBr/H ₂ O absorption heat pumping device and experimental validation	Formular um modelo dinâmico praticável destinado a ser empregado em estratégias de controle que se fundamentam em modelos para Dispositivos de Pré-Aquecimento de Ar (AHPDs), como feedback de estado ou controle preditivo de modelo.	Artigo

Estados Unidos	Xu; Rana; Díaz-Aponte (2023)	Electro-thermal numerical analysis of microbolometer over various kinds of design structure under adjustable thermal conductance in the Microeletromechanical system	Explorar a distribuição térmica, levando em consideração elementos como a absorção de radiação, condutância térmica, características de convecção e aquecimento Joule em estruturas de design com geometria variada. Essa análise é realizada por meio de métodos de Análise de Elementos Finitos (FEA).	Artigo
China	Jiang et al. (2022)	The blood heat exchanger in intra-arterial selective cooling infusion for acute ischemic stroke: A computational fluid-thermodynamics , experimental assessment and evaluation on the brain temperature	Analisar a praticidade e segurança do emprego de um Eletrodo Balão Intra-Aórtico (BHE) comercial (MYOtherm XP®, Medtronic) para o resfriamento do sangue, além de sua eficácia em resfriar o tecido cerebral, especificamente no contexto da IA-SCAI.	Artigo

O Quadro acima, revela os achados, resultado dos processos de inclusão e exclusão dos artigos, nos quais foram realizados de forma criteriosa, analisando os documentos por meio de leituras. Foram selecionadas as variáveis: país, autores, título, objetivos e tipo de documento. O quadro em questão destacou autores como Syrodoy (2023) que desenvolveu um modelo matemático para calcular os processos de transferência de calor e transferência de massa que ocorrem durante a evaporação dos fluidos aquecidos, já Abu-Zeid et al. (2023) investigou a polarização de temperatura (TP) e a polarização de concentração (CP), que afetam o desempenho do sistema de destilação por membrana de entreferro movido a energia solar (SP-AGMD) sob diversas condições de operação. Ambos refletiram em seus tratados a importância de analisar o resfriamento do ponto de vista de diferentes temperaturas, no sentido de se chegar a resultados mais fiéis utilizando cálculos diferencial.

Já autores como Radulescu et al. (2022) e Hancox et al (2022), analisaram o processo de expansão térmica de materiais da indústria eletretrônica, e sua importância na análise dos diversos tipos de materiais usados na indústria.

Staudt et al. (2023) formulou um modelo dinâmico praticável destinado a ser empregado em estratégias de controle que se fundamentam em modelos para Dispositivos de Pré-Aquecimento de Ar (AHPDs), como feedback de estado ou controle preditivo de modelo, demonstrando a necessidade da utilização de modelagem experimental controlada, para analisar melhor o processo que envolve o aquecimento dos materiais; e autores como Marrakchi 2023, reforçou a necessidade de modelagem matemática para descrição e previsão de mudanças na temperatura, ferramentas essas importantes para análise da variação de temperatura.

Em suma, todos os autores aqui abordados, demonstraram a necessidade de utilização de métodos de modelagem para analisar de forma mais precisa, variações de temperatura como aquecimento e resfriamento dos diversos materiais utilizados na indústria geral.

3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Considerando um corpo com temperatura uniforme T_c em todos os seus pontos, sem fonte de calor em seu interior, inserido em um ambiente com temperatura uniforme T_a , de tal modo que $T_c \neq T_a$, haverá então fluxo de calor do mais quente para o mais frio, ou seja, se o corpo estiver com temperatura superior à do ambiente, esse corpo resfriará, mas se estiver com temperatura inferior à do ambiente, esse corpo aquecerá. Em ambos os casos, resfriamento ou aquecimento, o corpo tenderá, após tempo suficientemente grande, a equalizar sua temperatura com a temperatura ambiente.

Modelando o ambiente como um “reservatório infinito” de calor, ou seja, um sistema que consegue perder ou ganhar calor sem alterar sua temperatura, temos a seguinte equação diferencial que determina a taxa de variação da temperatura de um corpo que se resfria espontaneamente com o tempo, estabelecida por Isaac Newton em 1701 e nomeada como Lei de Newton do Resfriamento (Bariviera *et al.*, 2017):

$$(1) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Onde:

a) T é a temperatura do corpo;

b) t é o tempo; e

c) k é a constante de resfriamento, que depende da massa do corpo, do seu material e da superfície exposta ao ambiente (Silva, 2014).

Resolvendo a Equação 1, que é uma Equação Diferencial Ordinário (EDO) de 1ª ordem, pelo método da separação de variáveis, temos:

$$(2) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \rightarrow \frac{dT}{T - T_a} = -k dt \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_a} = \int -k dt \rightarrow$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + C_1 \rightarrow T - T_a = e^{-kt + C_1} \rightarrow$$

$$T(t) = T_a + C e^{-kt}$$

Onde:

a) C é uma constante.

De modo análogo, para a situação do corpo estar com temperatura inferior à temperatura ambiente, teremos um aquecimento do corpo, modelado pela equação a seguir:

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T_a - T)$$

A solução da Equação 3, expressa a seguir, é similar à demonstrada para a Equação 2. Teremos então como solução para a situação de aquecimento do corpo:

$$(4) \quad T(t) = T_a - C e^{-kt}$$

3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para predição numérica da temperatura de um corpo sujeito a resfriamento/aquecimento ambiente, construiu-se um algoritmo na linguagem de programação Python, que está documentado com comentários no próprio código e segue no Apêndice A.

No algoritmo construído fez-se uso dos pacotes matplotlib, pandas e numpy para auxílio na implementação da rotina. Esse algoritmo é capaz de prever a temperatura de um corpo com o transcorrer do tempo, tanto para situação de resfriamento, quanto para aquecimento ambiente.

O modelo matemático implementado no algoritmo é o da Lei de Newton do Resfriamento, descrito no tópico 3.1 do presente artigo.

Ademais, a rotina foi construída de modo a solicitar ao usuário como entradas, via terminal, a temperatura inicial do objeto, a temperatura ambiente e a constante de resfriamento do corpo, caso o usuário a conheça. Caso não a conheça, a algoritmo solicita ao

usuário a temperatura do objeto em um instante de tempo qualquer e que instante de tempo seria esse. Como saída de dados, o código fornecerá, via terminal, a constante de resfriamento do corpo, caso seja desconhecida pelo usuário, e uma tabela com a temperatura do corpo para tempos de 0 a 40 min, com intervalos de tempo de 1 min, e, via janela interativa, um gráfico da temperatura do corpo em função do tempo, para intervalo de 0 a 40 min. Com mínimos ajustes no código, a tabela e o gráfico podem exibir outros intervalos de tempo, conforme interesse específico do usuário.

3.3 PYTHON E SUAS APLICAÇÕES

Para a realização dessa pesquisa foi necessário introduzir alguns conceitos elementares de cálculo numérico, mostrando como eles podem ser explorados em PYTHON. Esse programa processa estruturas de dados designadas por objetos, onde se incluem variáveis escalares de diversos tipos, representando números inteiros, lógicos, de vírgula flutuante, complexos, e estruturas mais complexas como listas. O utilizador de PYTHON tem a possibilidade definir novas estruturas e estabelecer regras e funções para a sua manipulação. Melhor ainda, o utilizador tem a possibilidade de importar livremente módulos de código aberto nos quais estão definidos objetos úteis para as suas aplicações.

3.4 COMPARATIVO ENTRE SOLUÇÕES ANALÍTICA, EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Para verificação e validação do código numérico desenvolvido, comparou-se a solução analítica, experimental e numérica para a situação do resfriamento ambiente de água pura, com temperatura inicial de 80° C, temperatura ambiente de 24°C e constante de resfriamento de 0,0308301 min⁻¹. Essas três soluções são apresentadas na Tabela 1 e na Figura 1.

Pela avaliação dos resultados, verifica-se que a modelagem matemática para obtenção da temperatura de um corpo sujeito a resfriamento ambiente pela Lei de Newton do Resfriamento é satisfatória, sendo obtido erro máximo de -6,0%, quando se compara resultados analíticos e experimentais, sendo o erro crescente à medida que a temperatura do corpo diminui. Ademais, verifica-se ainda que os resultados numéricos obtidos através do

algoritmo desenvolvido se alinham com os obtidos analiticamente, sendo o erro nulo em todo o espectro de temperaturas analisado.

Tabela 1: Soluções analítica, experimental e numérica para resfriamento de água pura à temperatura ambiente

Tempo (min)	Temperaturas (°C)			Erro (%) ¹	
	Analítico (A)	Experimental (E) ²	Numérico (N)	E-A	N-A
0	80,0000	80,0000	80,0000	0,0%	0,0%
5	72,0000	72,0000	72,0000	0,0%	0,0%
10	65,1428	63,5000	65,1429	-2,5%	0,0%
15	59,2653	57,0000	59,2653	-3,8%	0,0%
20	54,2274	51,0000	54,2274	-6,0%	0,0%

1: Segue Equação 5 descrita a seguir.

2: Dados obtidos de Rodrigues *et al.* (2019).

Fonte: Autoria própria

(5)
$$Erro = \frac{E-A}{A} \quad \text{ou} \quad Erro = \frac{N-A}{A}$$

Onde:

- a) A é o resultado analítico;
- b) E é o resultado experimental;
- c) N é o resultado numérico.

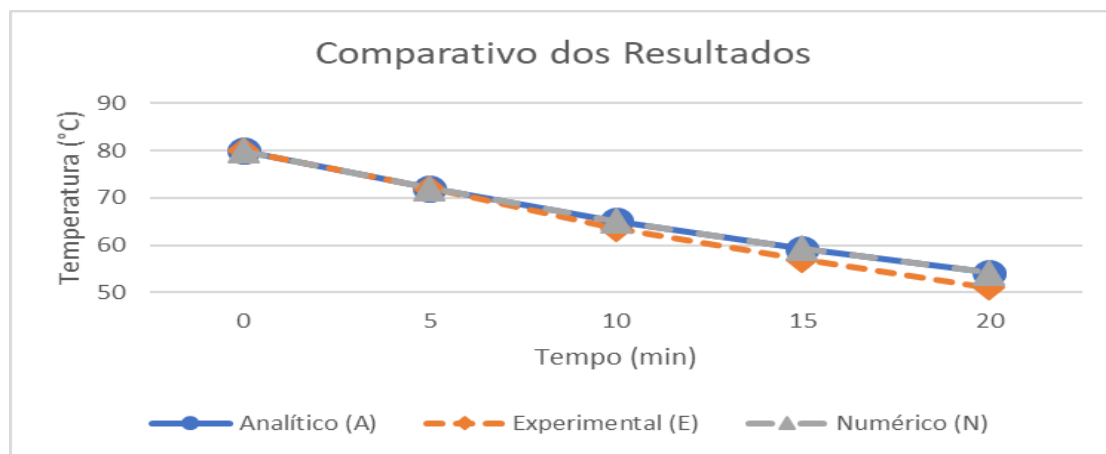


Figura 1: Soluções analítica, experimental e numérica para resfriamento de água pura a temperatura ambiente. Fonte: Autoria própria

Seguindo no processo de verificação e validação do código numérico desenvolvido, comparou-se a solução analítica, experimental e numérica para a situação do aquecimento ambiente de água pura, com temperatura inicial de 3°, temperatura ambiente de 22°C e constante de resfriamento de 0,0210721 min⁻¹. Essas três soluções são apresentadas na Tabela 2 e na Figura 2.

Tabela 2: Soluções analítica, experimental e numérica para aquecimento de água pura à temperatura ambiente

Tempo (min)	Temperaturas (°C)			Erro (%) ¹	
	Analítico (A)	Experimental (E) ²	Numérico (N)	E-A	N-A
0	3,0000	3,0000	3,0000	0,0%	0,0%
5	4,9000	4,9000	4,9000	0,0%	0,0%
10	6,6090	6,6000	6,6100	-0,1%	0,0%
15	8,1490	8,2000	8,1490	0,6%	0,0%
20	9,5341	9,8000	9,5341	2,8%	0,0%

1: Segue Equação 5 descrita anteriormente.

2: Dados obtidos de Rodrigues *et al.* (2019).

Fonte: Autoria própria

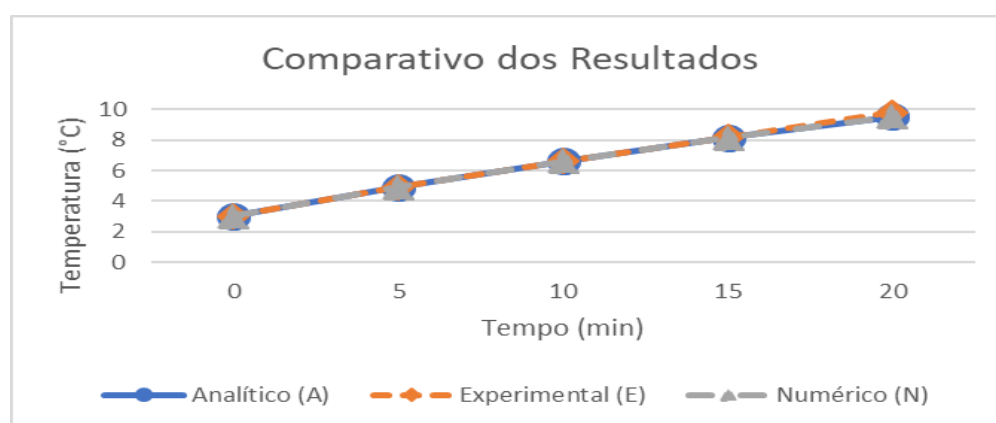


Figura 2: Soluções analítica, experimental e numérica para aquecimento de água pura a temperatura ambiente. Fonte: Autoria própria

Pela avaliação dos resultados, verifica-se que a modelagem matemática para obtenção da temperatura de um corpo sujeito a aquecimento ambiente pela Lei de Newton do Resfriamento é satisfatória, sendo obtido erro máximo de 2,8%, quando se compara resultados analíticos e experimentais, sendo o erro crescente à medida que a temperatura do corpo

aumenta. Além disso, verifica-se ainda que os resultados numéricos obtidos através do algoritmo desenvolvido se alinham com os obtidos analiticamente, sendo o erro nulo em todo o espectro de temperaturas analisado.

3.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS REAIS DE RESFRIAMENTO

Nesta seção serão solucionados dois problemas reais de resfriamento ambiente de corpos fazendo uso do algoritmo desenvolvido, já verificado e validado.

3.5.1 RESFRIAMENTO AMBIENTE DE BARRA METÁLICA

Considerando uma barra metálica recém-saída de um processo industrial de fabricação a 98,6°C, sabendo que a mesma é deixada para resfriar à temperatura ambiente de 18,7°C. Sabendo que passado 1 min a barra tem temperatura de 83,9°C, pergunta-se em quanto tempo a barra em questão estará com a mesma temperatura ambiente?

Executando o algoritmo desenvolvido, verifica-se, no terminal, que o mesmo pede ao usuário como entradas a temperatura inicial do objeto em °C e a temperatura ambiente em °C e questiona se o usuário conhece a constante de resfriamento do objeto em questão. Inseriu-se então os dados de temperatura pedidos e informou-se que não se conhece a constante de resfriamento, logo, o algoritmo solicita entradas adicionais da temperatura do objeto em °C em um instante de tempo onde $t > 0$ e o valor de t em min correspondente a esse instante de tempo (Figura 3).

```
Digite a temperatura inicial do objeto em °C: 98.6
Digite a temperatura ambiente em °C: 18.7
Você possui o valor da constante de resfriamento do objeto (s/n)?: n
Digite a temperatura do objeto em °C em um instante t > 0: 83.9
Digite o tempo em min correspondente à temperatura acima: 1
```

Figura 3: Entradas solicitadas ao usuário pelo algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de barra metálica. Fonte: Autoria própria

Na sequência, o algoritmo fornece ao usuário, também via terminal, as seguintes saídas: constante de resfriamento de $0,20331638383962156 \text{ min}^{-1}$ e tabela com pares ordenados tempo-temperatura do objeto, em $^{\circ}\text{C}$ (Figura 4). Além disso, o algoritmo exibe ainda janela interativa com gráfico da temperatura do objeto em função do tempo (Figura 5).

A constante de resfriamento vale $0.20331638383962156 \text{ min}^{-1}$

	Tempo [min]	Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]
0	0.0	98.600000
1	1.0	83.900000
2	2.0	71.904506
3	3.0	62.115942
4	4.0	54.128278
5	5.0	47.610184
6	6.0	42.291289
7	7.0	37.950965
8	8.0	34.409173
9	9.0	31.518999
10	10.0	29.160560
11	11.0	27.236027
12	12.0	25.665569
13	13.0	24.384043
14	14.0	23.338293
15	15.0	22.484940
16	16.0	21.788587
17	17.0	21.220349
18	18.0	20.756655
19	19.0	20.378272
20	20.0	20.069503
21	21.0	19.817542
22	22.0	19.611937
23	23.0	19.444159
24	24.0	19.307248
25	25.0	19.195527
26	26.0	19.104360
27	27.0	19.029966
28	28.0	18.969259
29	29.0	18.919720
30	30.0	18.879296
31	31.0	18.846309
32	32.0	18.819391
33	33.0	18.797426
34	34.0	18.779501
35	35.0	18.764875
36	36.0	18.752939
37	37.0	18.743199
38	38.0	18.735252
39	39.0	18.728766
40	40.0	18.723474

Figura 4: Saídas do algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de barra metálica. Fonte: Autoria própria

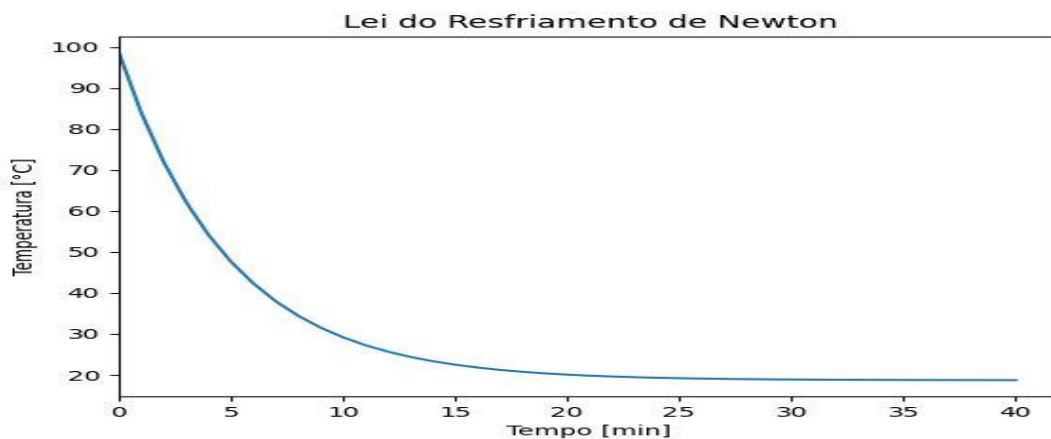


Figura 5: Gráfico da temperatura do objeto em função do tempo, exibido pelo algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de barra metálica. Fonte: Autoria própria

Consultando a tabela exibida na Figura 4, verifica-se que a temperatura da barra é aproximadamente a temperatura ambiente ($18,7^{\circ}\text{C}$) no instante de tempo $t = 37 \text{ min}$, ou seja, após 37 minutos a barra estará resfriada com temperatura igual à temperatura ambiente, sendo essa a solução do problema.

3.5.2 RESFRIAMENTO AMBIENTE DE UM CORPO HUMANO

Considerando um corpo humano com temperatura de $34,8^{\circ}\text{C}$, encontrado em um ambiente com temperatura igual a $22,2^{\circ}\text{C}$ e sabendo que passada 1 h (60 min), esse corpo está com temperatura igual a $34,1^{\circ}\text{C}$, qual seria a hora da morte?

Executando o algoritmo desenvolvido, verifica-se, no terminal, que o mesmo pede ao usuário como entradas a temperatura inicial do objeto em $^{\circ}\text{C}$ e a temperatura ambiente em $^{\circ}\text{C}$ e questiona se o usuário conhece a constante de resfriamento do objeto em questão. Inseriu-se então os dados de temperatura pedidos e informou-se que não se conhece a constante de resfriamento, logo, o algoritmo solicita entradas adicionais da temperatura do objeto em $^{\circ}\text{C}$ em um instante de tempo onde $t > 0$ e o valor de t em min correspondente a esse instante de tempo (Figura 6).

```
Digite a temperatura inicial do objeto em °C: 34.8
Digite a temperatura ambiente em °C: 22.2
Você possui o valor da constante de resfriamento do objeto (s/n)? : n
Digite a temperatura do objeto em °C em um instante t > 0: 34.1
Digite o tempo em min correspondente à temperatura acima: 60
```

Figura 6: Entradas solicitadas ao usuário pelo algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de um corpo humano. Fonte: Autoria própria

Na sequência, o algoritmo fornece ao usuário, também via terminal, as seguintes saídas: constante de resfriamento de $0,0009526402306658047 \text{ min}^{-1}$ e tabela com pares ordenados tempo-temperatura do objeto, em $^{\circ}\text{C}$ (Figura 7). Além disso, o algoritmo exibe ainda janela interativa com gráfico da temperatura do objeto em função do tempo (Figura 8). Cumpre ressaltar que o código foi customizado para resolução desse problema em específico, de modo que a tabela exibida no terminal e o gráfico exibido na janela interativa fornecessem dados no intervalo de interesse para solução do problema. Esse código customizado segue no Apêndice B.

```

A constante de resfriamento vale  0.0009526402306658047 min^-1

```

	Tempo [min]	Temperatura [$^{\circ}\text{C}$]
0	-150.0	36.735484
1	-149.0	36.721644
2	-148.0	36.707816
3	-147.0	36.694002
4	-146.0	36.680201
5	-145.0	36.666413
6	-144.0	36.652639
7	-143.0	36.638877
8	-142.0	36.625129
9	-141.0	36.611393
10	-140.0	36.597671
11	-139.0	36.583962
12	-138.0	36.570265
13	-137.0	36.556582
14	-136.0	36.542912
15	-135.0	36.529255
16	-134.0	36.515611
17	-133.0	36.501980
18	-132.0	36.488361
19	-131.0	36.474756
20	-130.0	36.461164

Figura 7: Saídas do algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de um corpo. Fonte: Autoria própria

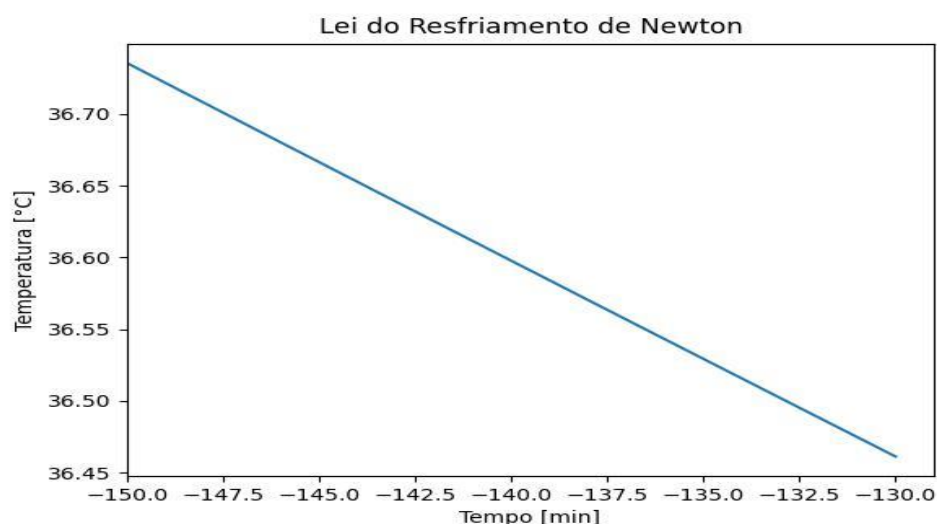


Figura 8: Gráfico da temperatura do objeto em função do tempo, exibido pelo algoritmo na solução numérica do problema de resfriamento de um corpo. Fonte: Autoria própria

Consultando a tabela exibida na Figura 7, verifica-se que quando a temperatura do corpo é de aproximadamente 36,5°C (temperatura do corpo humano em vida), temos tempo $t = -133 \text{ min}$, ou seja, a hora da morte foi aproximadamente após 2 horas e 13 minutos antes do momento em que o corpo foi encontrado, sendo essa a solução do problema.

4. CONCLUSÃO

Pelo exposto no presente artigo, ficou evidenciado, quando se avaliou resultados experimentais e analíticos, que a Lei de Newton do Resfriamento modela matematicamente bem o comportamento da temperatura de um corpo enquanto é resfriado ou aquecido à temperatura ambiente.

Assim, quando se comparou resultados numéricos e analíticos, que o algoritmo desenvolvido também modela adequadamente o comportamento da temperatura de um corpo enquanto é resfriado ou aquecido à temperatura ambiente, sendo constatado, por meio da aplicação desse código na resolução de problemas de interesse prático, que esse algoritmo tem utilidade para aplicação em problemas reais na física e na engenharia.

5. REFERÊNCIAS

BARIVIERA, G. D.; MUMBERGER, G. M.; SANTOS, L. A.; PADUA, S. G. B. d. Lei de Resfriamento de Newton: Resolução por EDO e Método de Euler. Anais Inovação, Tecnologia, Gestão e Sustentabilidade., v. 03, 2017.

DA SILVA BUENO, Rafael Winícius; BALLEJO, Clarissa Coragem; VIALI, Lori. Equações diferenciais ordinárias, Newton e o bolo de chocolate: Modelagem Matemática na Educação. TANGRAM-Revista de Educação Matemática, v. 4, n. 2, p. 30-58, 2021.

DUARTE, Adriéli Aline. Resolução de problemas modelados pela lei do resfriamento de Newton. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

GOMES, Marcio; LOBO, T.; SILVA, M. G. A lei do resfriamento de Newton no cálculo do calor específico de metais: o uso do Arduíno e os sensores Lm35 e Ds18b20. Revista do Professor de Física, v. 4, n. 3, p. 73-83, 2020.

HANCOX, E., Derry, M. J., Greenall, M. J., Huband, S., Al-Shok, L., Town, J. S., ... & Haddleton, D. M. (2022). Heterotelechelic homopolymers mimicking high χ -ultralow N block copolymers with sub-2 nm domain size. Chemical Science, 13(14), 4019-4028.

JIANG, M., Gao, Y., Wu, C., Wu, L., Tang, S., Yin, Z., ... & Ji, X. (2022). The blood heat exchanger in intra-arterial selective cooling infusion for acute ischemic stroke: A

computational fluid-thermodynamics performance, experimental assessment and evaluation on the brain temperature. *Computers in Biology and Medicine*, 145, 105497.

LIMA, Eucládia Alves de et al. Aspectos históricos dos conteúdos de física: uma análise da abordagem do conteúdo "Leis de Newton" nos livros didáticos. 2023.

LOURENÇO, Edrei; OLIVEIRA, Paulo César. Aspectos da lei de resfriamento de Newton abordados em uma tarefa para o ensino médio. *INTERMATHS*, v. 3, n. 1, p. 125-138, 2022.

MADERO-CASTRO, R. M., Luna-Triguero, A., Sławek, A., Vicent-Luna, J. M., & Calero, S. (2023). On the use of Water and Methanol with Zeolites for Heat Transfer. *ACS Sustainable Chemistry & Engineering*, 11(11), 4317-4328.

MAKAHLEH, F. M., Badran, A. A., Attar, H., Amer, A., & Al-Maaitah, A. A. (2022). Modeling and simulation of a two-stage air cooled adsorption chiller with heat recovery part I: physical and mathematical performance model. *Applied Sciences*, 12(13), 6542..

MARINHO, George Santos, and Robson Fernandes de Farias. "Considerações teórico-experimentais sobre o resfriamento pós morte." *Revista Brasileira de Criminalística* 12.1 (2023): 47-53.

MARRAKCHI, Yassine, et al. "Experimental characterization, modelling and compensation of temperature effects in optotunable lenses." *Scientific Reports* 13.1 (2023): 1575.

MUNIZ, W. D.; Fürkotter, M.; Davoli, M. Lei do resfriamento de Newton: modelagem matemática e ensino-aprendizagem. III Encontro Paranaense de Educação Matemática. 10 a 12 de out. 2019.

PETRY, Vitor Jose et al. Projeto Modelagem Matemática: Lei De Resfriamento De Newton. SEPE-Seminário de Ensino, Pesquisa e Extensão da UFFS, v. 9, 2019.

RĂDULESCU, B., Mihalache, A. M., Hrițuc, A., Rădulescu, M., Slătineanu, L., Munteanu, A., ... & Nagîț, G. (2022). Thermal expansion of plastics used for 3D printing. *Polymers*, 14(15), 3061.

RODRIGUES, W. M. D.; FURKOTTER, M.; LOPES, M. D. M. Lei de Resfriamento de Newton: Modelagem Matemática e Ensino-Aprendizagem. XV Encontro Paranaense de Educação Matemática, Londrina, 10 a 12 de outubro de 2019.

SILVA, J. S. F. Sobre o Problema da Variação de Temperatura de um Corpo. *CONNECTIONLINE*, n. 5, 2014.

SILVA, Pedro Augusto Soares da et al. Uma proposta de ensino de funções exponenciais a partir de uma prática da aplicação da lei do resfriamento de Newton. 2021.

SOLANKI PK, Rabin Y. Thermomechanics aspects of isochoric cryopreservation: A new modeling approach and comparison with experimental data. *PLoS ONE*, 2022, 17(4): e0267852.

SOUSA, Milena Nunes Alves; BEZERRA, André Luiz Dantas; DO EGYPTO, Ilana Andrade Santos. Trilhando o caminho do conhecimento: o método de revisão integrativa para análise e síntese da literatura científica. *Observatório De La Economía Latinoamericana*, v. 21, n. 10, p. 18448-18483, 2023.

STAUDT, S., Unterberger, V., Göllés, M., Wernhart, M., Rieberer, R., & Horn, M. (2023). Control-oriented modeling of a LiBr/H₂O absorption heat pumping device and experimental validation. *Journal of Process Control*, 128, 103024.

SYRODOY, Semen et al. Mathematical Modeling of the Evaporation of a Water Drop from a Heated Surface. **Langmuir**, v. 39, n. 14, p. 5041-5055, 2023.

TORRES, Ellen Mirley Medeiros. Análise da lei de resfriamento de newton aplicada ao pão tipo francês durante o processo de assamento. 2020

VYAZOVKIN, Sergey; GALUKHIN, Andrey. Problems with Applying the Ozawa–Avrami Crystallization Model to Non-Isothermal Crosslinking Polymerization. *Polymers*, v. 14, n. 4, p. 693, 2022.

WANG, Leixin et al. Modeling and Performance Analysis of a Pump-Driven Chip-Level Two-Phase Cooling System in Data Centers. *Applied Sciences*, v. 13, n. 13, p. 7472, 2023.

XU, Yanan; RANA, Mukti; DÍAZ-APONTE, Kevin. Electro-thermal numerical analysis of microbolometer over various kinds of design structure under adjustable thermal conductance in the Microeletromechanical system. *Heliyon*, v. 9, n. 4, 2023..