Estudo do empilhamento de materiais anisotrópicos no campo gravitacional

Study of the stacking of anisotropic materials in a gravitational field.

Estudio del apilamiento de materiales anisotrópicos en un campo gravitatorio.

Rick Allen de Lima Ferreira. Mestre em Física pela Universidade Federal do Piauí, UFPI, Teresina, PI. E-mail: rickallenphysics@gmail.com https://orcid.org/0009-0005-2000-3107

José Jefferson da Silva Nascimento. Professor Titular do curso de Engenharia de Processos, UFCG, Campina Grande, PB. E-mail: jose.jeferson@professor.ufcg.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-2620-6491

Rick Allen de Lima Ferreira: rickallenphysics@gmail.com

DOI: 10.61223/coopex.v17i01.8064

Submetido: 20/04/2026
Aprovado: 04/05/2026

ISSN 2177-5052

Resumo
Este artigo tem como objetivo realizar uma análise de pilhas formadas de materiais anisotrópicos, ou seja, materiais que não possuem propriedades constantes em todas as direções. O referido artigo é uma revisão integrativa, possuindo um método mais amplo de revisão. Ela permite a inclusão simultânea de pesquisas com diferentes metodologias, proporcionando uma compreensão mais holística de um fenômeno. Esse tipo de material expressa com boa aproximação a realidade dos empilhamentos que ocorrem na natureza, por exemplo, podemos ver as montanhas como gigantescas pilhas formadas ao longo dos séculos por rochas de diferentes formas e tamanhos, grãos de areia, pedaços de madeira e diferentes outros materiais. A partir desse estudo, serão abordados ângulo que caracterizava a pilha experimental – o ângulo de repouso, buscando relacionar esse ângulo com alguma propriedade microscópica dos elementos constituintes da pilha, como por exemplo: o tamanho, a rugosidade de sua superfície, coeficientes de restituição, seu formato ou “grau de anisotropia”

Palavras-Chave: Campo gravitacional; Empilhamentos de partículas; Estrutura granular;Materiais anisotrópicos;

Abstract
This article aims to analyze piles formed from anisotropic materials, that is, materials that do not have constant properties in all directions. This article is an integrative review, employing a broader review method. It allows the simultaneous inclusion of research with different methodologies, providing a more holistic understanding of a phenomenon. This type of material accurately reflects the reality of piles that occur in nature; for example, we can see mountains as gigantic piles formed over centuries by rocks of different shapes and sizes, grains of sand, pieces of wood, and various other materials. This study will address the angle that characterized the experimental pile – the angle of repose – seeking to relate this angle to some microscopic property of the constituent elements of the pile, such as: size, surface roughness, coefficients of restitution, shape, or "degree of anisotropy".

KeywordS: Gravitational field; Particle stacking; Granular structure; Anisotropic materials;

Resumen
Este artículo analiza pilas formadas por materiales anisotrópicos, es decir, materiales cuyas propiedades no son constantes en todas las direcciones. Se trata de una revisión integradora que emplea un método de revisión más amplio. Esto permite la inclusión simultánea de investigaciones con diferentes metodologías, proporcionando una comprensión más holística del fenómeno. Este tipo de material refleja con precisión la realidad de las pilas que se forman en la naturaleza; por ejemplo, podemos observar montañas como gigantescas pilas formadas a lo largo de siglos por rocas de diferentes formas y tamaños, granos de arena, trozos de madera y otros materiales. Este estudio abordará el ángulo que caracteriza la pila experimental —el ángulo de reposo— buscando relacionarlo con alguna propiedad

ISSN 2177-5052

microscópica de los elementos que la componen, como el tamaño, la rugosidad superficial, los coeficientes de restitución, la forma o el grado de anisotropía.

Palabras clave: Campo gravitatorio; Apilamiento de partículas; Estructura granular; Materiales anisotrópicos;

Introdução

O estudo e compreensão de sistemas complexos, já a algum tempo, tem sido objeto de grande interesse por parte da comunidade científica. Todo esse interesse se fundamenta no fato da maior parte dos fenômenos naturais se manifestarem de modo não-linear. Nesse trabalho estuda-se um dos sistemas complexos de grande interesse – o empilhamento de materiais anisotrópicos no campo gravitacional. As pilhas geradas possuem formatos diferentes, mas guardam certa regularidade quando se analisa um espaço amostral maior de pilhas.

Não é de hoje que se estuda o empilhamento de materiais, a maioria desses estudos se baseia em pilhas formadas por materiais isotrópicos. Nesse trabalho a preocupação foi gerar pilhas de materiais anisotrópicos, ou seja, materiais que não possuem propriedades constantes em todas as direções. Esse tipo de material expressa com boa aproximação a realidade dos empilhamentos que ocorrem na natureza, por exemplo, podemos ver as montanhas como gigantescas pilhas formadas ao longo dos séculos por rochas de diferentes formas e tamanhos, grãos de areia, pedaços de madeira e diferentes outros materiais.

Com o objetivo de se compreender um pouco mais a respeito dessas manifestações naturais buscou-se definir um ângulo que caracterizava a pilha experimental – o ângulo de repouso. Um dos objetivos desse trabalho é relacionar esse ângulo com alguma propriedade microscópica dos elementos constituintes da pilha, como por exemplo: o tamanho, a rugosidade de sua superfície, coeficientes de restituição, seu formato ou “grau de anisotropia” Geralmente a superfície de uma pilha consiste de três diferentes regiões: uma parte arredondada, no topo e com concavidade para baixo, uma linear na região central onde comumente é definido o ângulo de repouso e na parte inferior uma outra região também arredondada, mas com curvatura oposta em relação à parte superior, esta última região é conhecida como “cauda” da pilha.[1]

Concentramos nossos estudos na segunda região, a linear, pois se espera relacionar o ângulo de repouso com alguma propriedade microscópica dos elementos que constituem as pilhas.

Neste trabalho realizamos estudos experimentais sobre a evolução temporal da pilha e seu ângulo de repouso, observando se estes dependem ou não dos materiais usados bem como da forma como estes materiais são empilhados. Consideramos dois tipos de empilhamento, ambos realizados dentro de uma célula do tipo “Hele Shaw”, que diferiam pelo fato de uma dessas células apresentar uma modificação em relação à célula usual.

Método

Para os processos de formação das pilhas foram utilizados diferentes materiais, tais como:

→ Percevejos

→ Pregos

- de cerca, comum
- sem cabeça(1,7 x 0,1 cm)

→ Clipe

- grande (4,7 x 1,8 cm)
- pequeno (1,3 x 0,5 cm)

→ Arroz (Longo fino, tipo 1)

→ Açúcar (Estivas, refinado granulado)

→ Feijão (Da Mamãe, carioquinha,tipo 1)

→ Aros metálicos de alumínio

→ Cruzetas de plástico

Estes materiais foram empilhados em regiões diferentes descritas abaixo:

→ Célula de “Helle Shaw” modificada, formada por duas lâminas de vidro, 29,9 cm x 19,8 cm, em base de madeira e com ângulo de abertura de 60°(Ver Figura 1)

→ Célula de “Helle Shaw” normal, formada por duas lâminas de vidro, 50,1 cm x 20,1 cm, em base de madeira e paralelas entre si (Ver Figura 2).

Todos os materiais foram despejados de uma altura fixa de modo suave e cadenciado.

ISSN 2177-5052

Uma das preocupações foi ter controle da massa envolvida na formação da pilha. Para ter esse controle, na célula de “Helle Shaw” modificada, foram utilizadas bisnagas de plástico (Fig. 3), com diâmetros diferentes dois a dois, com exceção do feijão. Neste tipo de célula foram utilizados os materiais: açúcar(isotrópico), arroz, feijão e percevejos(anisotrópicos). A massa líquida de cada bisnaga do material foi fixada(detalhada no Anexo A). Após o esvaziamento de cada bisnaga produzia-se uma foto a fim de obter o ângulo de repouso para aquela massa.

No caso dos aros metálicos, clipes, cruzetas de plástico, percevejos e pregos o empilhamento ocorreu dentro da célula de “Helle Shaw” normal com a mesma preocupação de controle de massa, assim fixou-se a massa, que caía de modo progressivo de uma esteira horizontal(Fig. 4) com relação à base da célula. Como no primeiro caso, as fotos foram produzidas após quantidades fixas de massa. A fim de compreender se o modo de queda do material influenciava no formato da pilha bem como no seu ângulo de repouso, empilhou-se os materiais de três modos diferentes: a queda de elementos de costa(>>>), de frente(<<<) e de modo aleatório(^< >^^<^).

Para a determinação do ângulo de repouso fêz-se uso do programa *GIMP* do sistema operacional *Linux*. O critério utilizado para determinar o ângulo foi selecionar a parte da pilha mais linear, que em geral é a região mais central. Isso equivale a descontar cerca de 5% da região do topo e 15% da “cauda”, que são justamente as partes onde a pilha se encurva. Vale ressaltar que, para a determinação do ângulo, o bom senso é fundamental em algumas situações, visto que nem sempre a pilha apresenta um formato “bem comportado”.

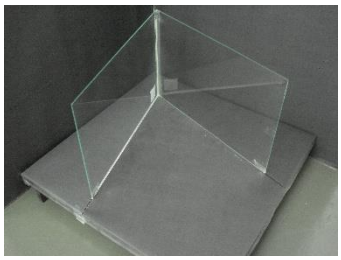


Figura 1

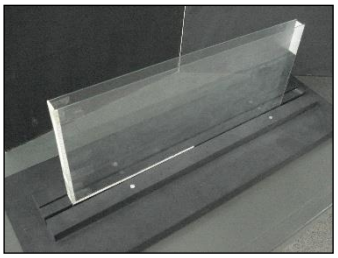


Figura 2

ISSN 2177-5052



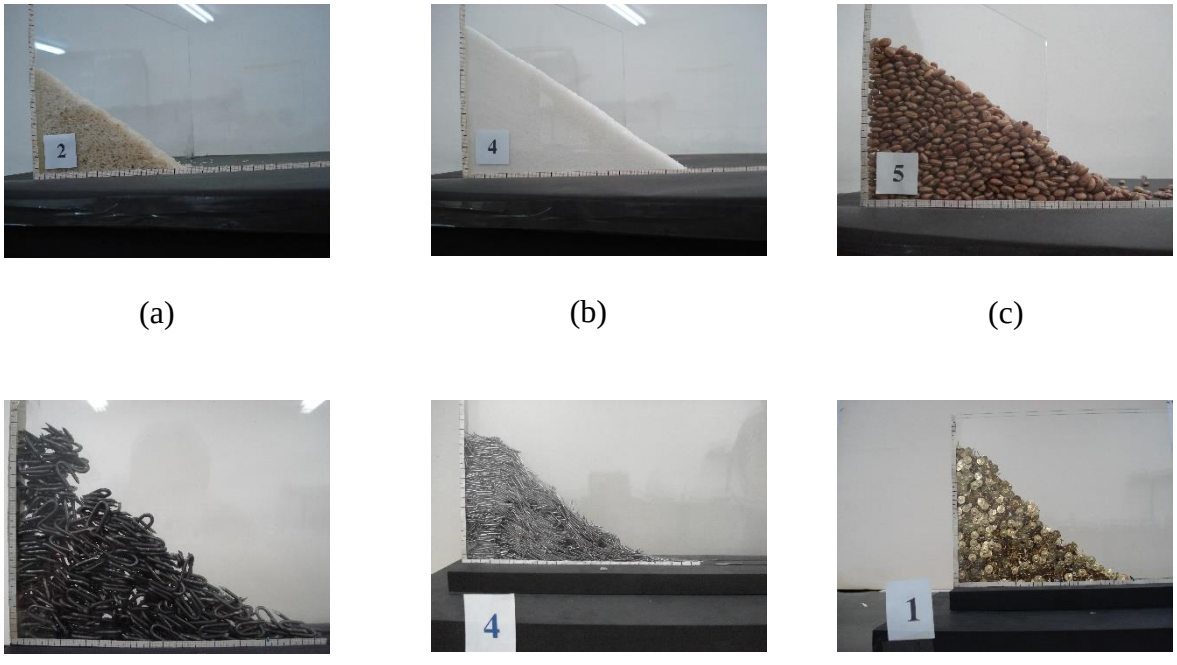
Figura 3



Figura 4

Resultados

A seguir, selecionamos imagens de padrões típicos de empilhamento de alguns materiais utilizados ao longo dos experimentos. Nas fotografias abaixo pode-se perceber tanto materiais anisotrópicos, Figura 5 (a), (c), (d), (e), (f), como também isotrópico como por exemplo o da Figura 5 (b).



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Figura 5

ISSN 2177-5052

A análise dos dados coletados dessas e das demais pilhas nos permitiu obter os seguintes resultados para o ângulo de repouso:

RELAÇÃO ENTRE A MASSA E O ÂNGULO DE REPOUSO θr

Tabela 1

AÇÚCAR – ABERTURA I					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	33,51°	34,22°	33,54°	33,37°	34,61°
2	34,14°	36,47°	34,62°	36,65°	35,54°
3	34,37°	36,66°	35,51°	34,40°	34,41°
4	34,32°	35,10°	36,24°	32,86°	34,22°
5	37,90°	35,32°	32,86°	32,73°	34,14°
⟨θr⟩	34,85°± 1,22	35,50°± 0,81	34,55°± 1,08	34,00°± 1,22	34,58°± 0,39

Tabela 2

AÇÚCAR – ABERTURA II					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	37,59°	34,31°	34,25°	32,30°	32,43°
2	31,92°	35,11°	34,89°	32,98°	33,55°
3	36,42°	36,21°	32,94°	33,49°	34,71°
4	35,26°	34,67°	32,83°	32,35°	34,96°
5	33,61°	33,17°	31,43°	32,08°	33,74°
⟨θr⟩	34,96°± 1,76	34,69°± 0,77	33,27°± 1,04	34,64°± 0,48	33,88°± 0,76

Tabela 3

ARROZ – ABERTURA I					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	38,83°	39,01°	38,33°	37,28°	35,11°
2	41,10°	41,04°	38,57°	38,48°	39,35°
3	39,08°	40,53°	41,35°	35,18°	36,94°
4	39,78°	40,89°	39,72°	36,50°	39,91°
5	40,67°	38,01°	35,82°	39,04°	38,66°

ISSN 2177-5052

⟨θr⟩	39,89°± 0,79	39,90°± 1,11	38,76°± 1,42	37,30°±1,17	37,99°± 1,57

Tabela 4

ARROZ – ABERTURA II					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	38,13°	37,43°	34,82°	33,22°	33,06°
2	36,59°	35,31°	39,93°	35,94°	38,63°
3	39,10°	37,38°	39,13°	39,27°	41,08°
4	37,86°	38,32°	39,74°	38,70°	41,07°
5	37,81°	40,57°	37,98°	38,06°	36,57°
⟨θr⟩	37,90°± 0,57	37,80°± 1,31	38,32°± 1,54	37,04°± 1,97	38,08° ± 2,61

Tabela 5

FEIJÃO – ABERTURA I					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	32,60°	36,71°	37,52°	36,97°	36,62°
2	38,31°	34,77°	35,40°	35,81°	33,82°
3	33,73°	36,41°	33,42°	35,56°	32,46°
4	33,97°	38,51°	38,77°	37,94°	34,65°
5	37,57°	36,92°	37,42°	35,52°	35,67°
⟨θr⟩	35,24° ± 2,16	36,66° ± 0,86	36,50° ± 1,68	36,36° ± 0,88	34,64° ± 1,20

5

Tabela 6

PERCEVEJO - ALEATÓRIO					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	35,80°	43,68°	44,71°	46,30°	45,00°
2	35,46°	41,60°	44,03°	46,83°	46,23°
3	32,35°	49,99°	40,91°	43,14°	41,70°
4	29,48°	47,54°	43,26°	45,47°	43,33°
5	39,40°	43,74°	42,26°	43,13°	39,93°
⟨θr⟩	34,50° ± 2,87	45,31° ± 2,76	43,03° ± 1,16	44,97° ± 1,47	43,24° ± 1,94

Tabela 7

CLIPE GRANDE - FRENTE					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	33,01°	18,63°	24,83°	27,65°	35,31°
2	17,13°	22,39°	24,86°	31,18°	22,53°
3	16,93°	19,76°	22,45°	28,06°	24,78°
4	19,26°	36,53°	40,74°	29,97°	33,52°
5	26,15°	34,20°	28,80°	21,97°	30,65°

ISSN 2177-5052

⟨θr⟩	22,50° ± 5,67	26,30° ± 7,25	28,34° ± 5,15	27,77° ± 2,36	29,36° ± 4,56

Tabela 8

CLIPE GRANDE - COSTA					
PILHA	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5
1	23,08°	34,95°	24,86°	22,59°	22,02°
2	21,04°	25,91°	32,08°	32,10°	33,69°
3	19,05°	25,54°	21,60°	27,96°	29,04°
4	24,41°	17,41°	23,33°	23,98°	19,86°
5	13,34°	28,03°	27,28°	28,59°	25,35°
⟨θr⟩	20,18° ± 3,19	26,37° ± 4,10	25,83° ± 3,08	27,04° ± 3,01	25,99° ± 4,30

Tabela 9

CLIPE GRANDE - ALEATÓRIO					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	38,44°	39,89°	40,83°	32,42°	27,49°
2	24,52°	30,48°	32,54°	34,92°	35,96°
3	22,33°	21,65°	25,27°	31,48°	34,51°
4	26,57°	22,71°	31,08°	32,61°	30,93°
5	23,50°	27,40°	21,26°	21,29°	21,92°
⟨θr⟩	27,07° ± 4,54	28,43° ± 5,41	30,19° ± 5,54	30,54° ± 3,70	30,16° ± 4,36

6

Tabela 10

PREGO DE CERCA - FRENTE					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	40,63°	51,40°	42,13°	50,93°	48,12°
2	47,74°	33,4°	34,15°	47,70°	44,92°
3	34,31°	55,73°	42,60°	49,13°	50,76°
4	44,62°	40,81°	40,18°	46,10°	43,91°
5	37,90°	49,44°	36,17°	45,54°	43,10°
⟨θr⟩	41,04° ± 4,11	46,17°± 7,22	39,05° ± 3,11	47,88° ± 1,72	46,16° ± 2,62

Tabela 11

PREGO DE CERCA - COSTA					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	38,49°	54,81°	38,10°	41,25°	49,15°
2	45,92°	50,99°	52,08°	46,63°	44,46°
3	39,84°	40,92°	43,70°	48,21°	49,79°
4	28,33°	38,49°	46,07°	44,84°	36,23°

ISSN 2177-5052

5	34,18°	45,40°	47,03°	36,20°	47,00°
⟨θr⟩	37,35° ± 4,88	46,12° ± 5,42	45,39° ± 3,60	43,43° ± 3,76	45,33° ± 3,98

Tabela 12

PREGO DE CERCA - ALEATÓRIO					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	36,56°	56,73°	42,47°	46,65°	43,83°
2	42,75°	41,86°	44,85°	38,13°	36,74°
3	34,45°	27,90°	41,73°	43,12°	47,95°
4	38,27°	44,85°	37,77°	50,47°	49,32°
5	37,61°	47,96°	39,97°	49,43°	44,74°
⟨θr⟩	37,93° ± 2,07	43,86° ±7,18	41,36° ± 1,99	45,56° ± 3,95	44,52° ± 3,38

Tabela 13

AROS METÁLICOS					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	25.78°	29,82°	39,48°	34,27°	36,17°
2	23,82°	31,93°	37,74°	34,25°	33,56°
3	35,69°	33,74°	29,12°	38,51°	37,50°
4	46,40°	33,11°	35,65°	36,29°	39,87°
5	21,43°	30,74°	34,31°	33,69°	34,25°
⟨θr⟩	30,62° ± 8,34	31,87° ± 1,27	34,26° ± 2,01	35,40° ± 1,60	36,27° ± 1,93

7

Tabela 14

CRUZETAS DE PLÁSTICO					
PILHA	M-1	M-2	M-3	M-4	M-5
1	40,14°	37,86°	53,93°	67,08°	63,35°
2	32,68°	47,74°	53,79°	44,37°	46,94°
3	42,77°	38,73°	50,47°	53,68°	42,91°
4	34,00°	69,86°	43,92°	55,48°	42,44°
5	42,21°	61,70°	47,06°	52,37°	49,62°
⟨θr⟩	38,36° ± 4,20	51,20° ± 11,68	49,73° ± 3,59	54,60° ± 5,35	49,05° ± 5,95

Tabela 15

MATERIAIS	PERCEVEJOS	PREGOS SEM CABEÇA	CLIPES PEQUENOS
⟨θr⟩	41,9° ± 5,2	35,9° ± 1,7	40,6° ± 1,6

A partir destes resultados pode-se obter os seguintes gráficos da evolução temporal do ângulo de repouso, θr, da pilha para os materiais estudados:

ISSN 2177-5052

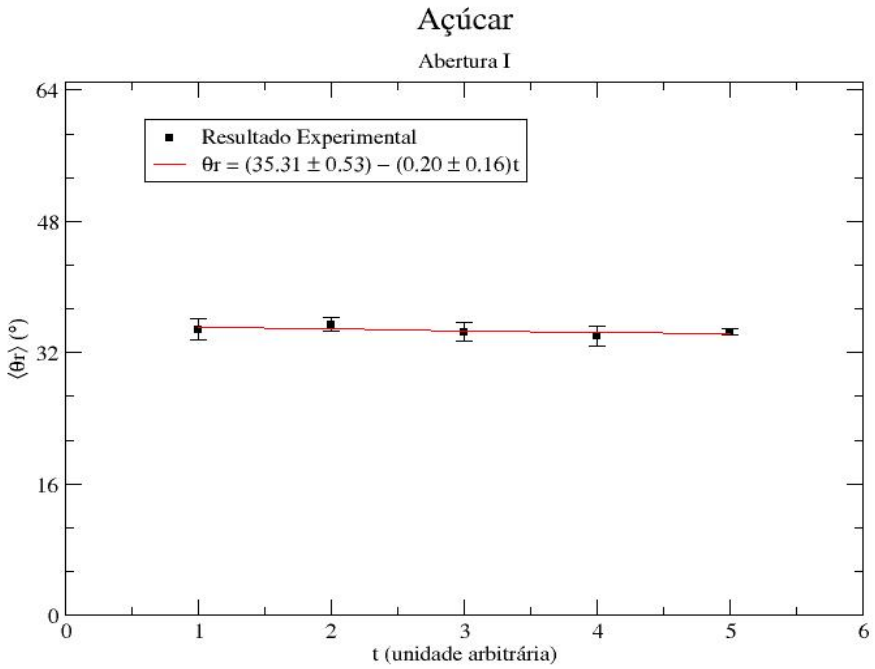


Figura 6

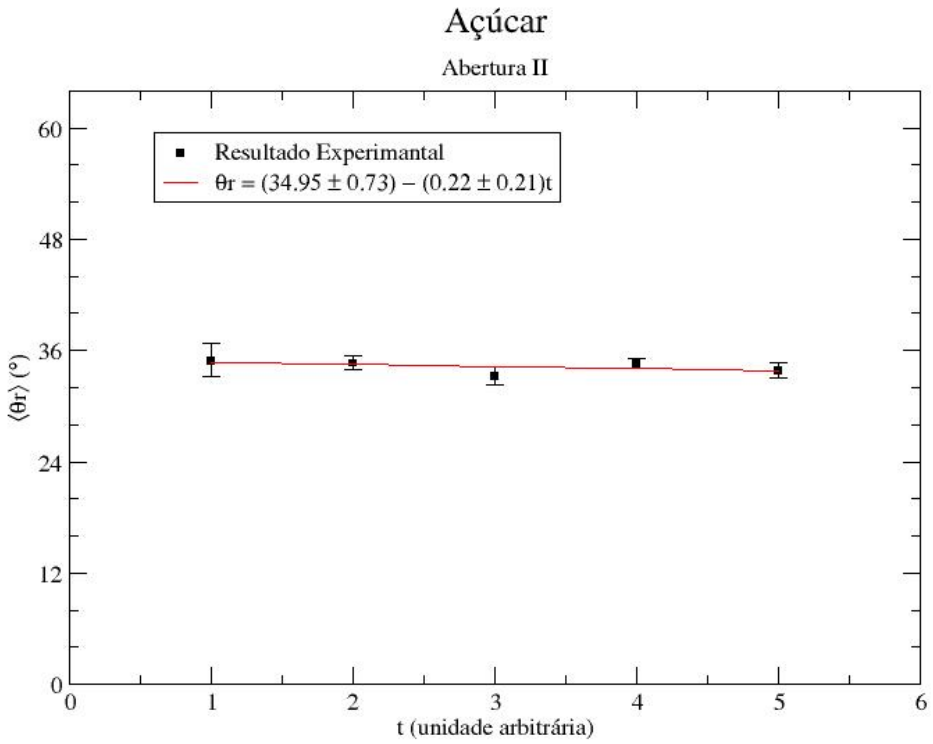


Figura 7

ISSN 2177-5052

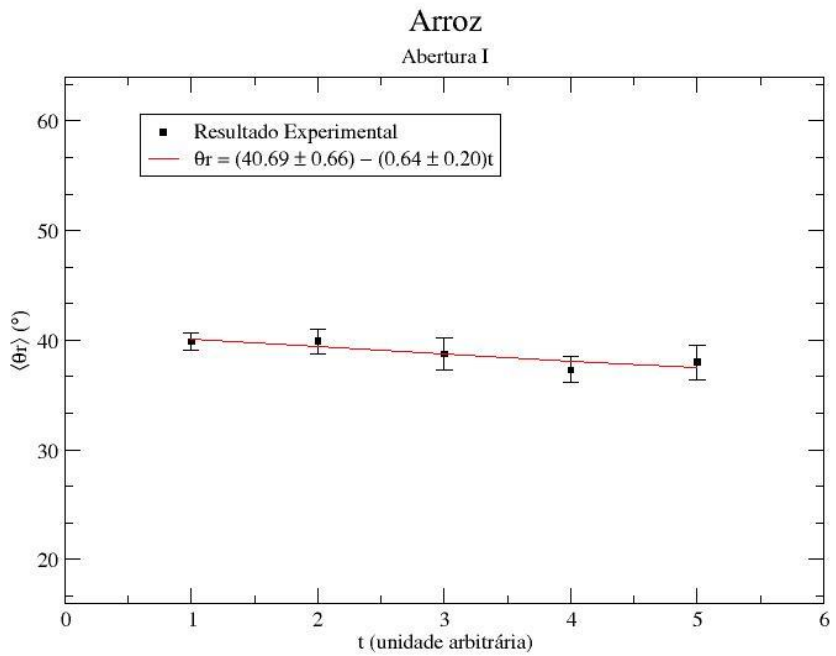


Figura 8

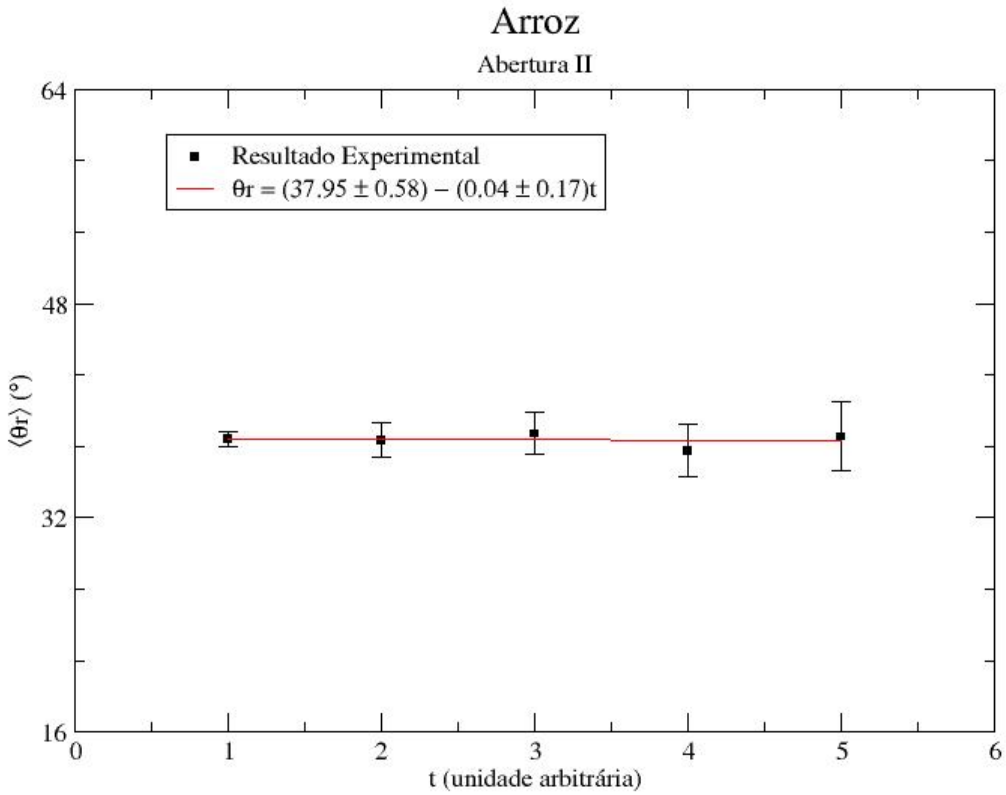


Figura 9

ISSN 2177-5052

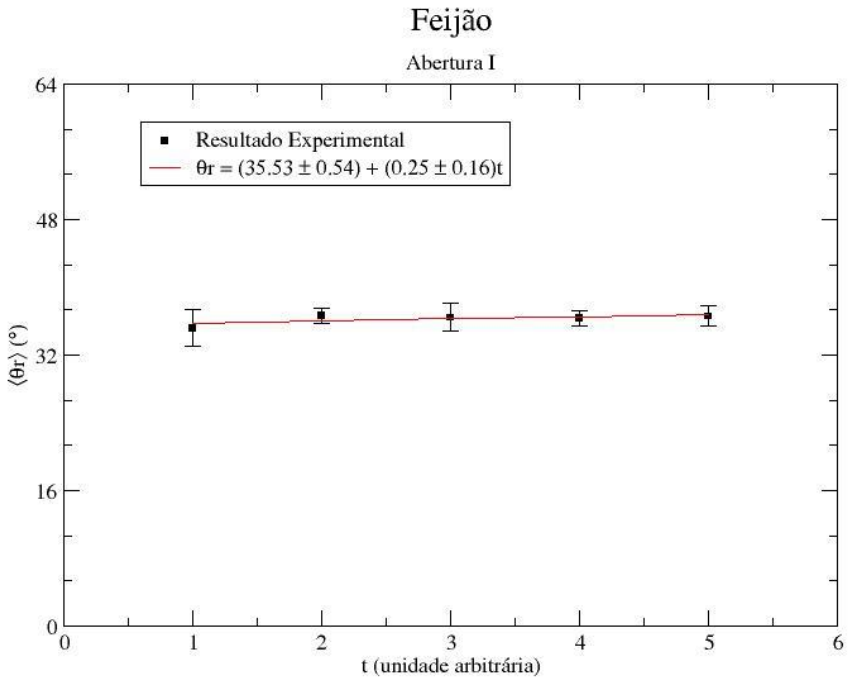


Figura 10

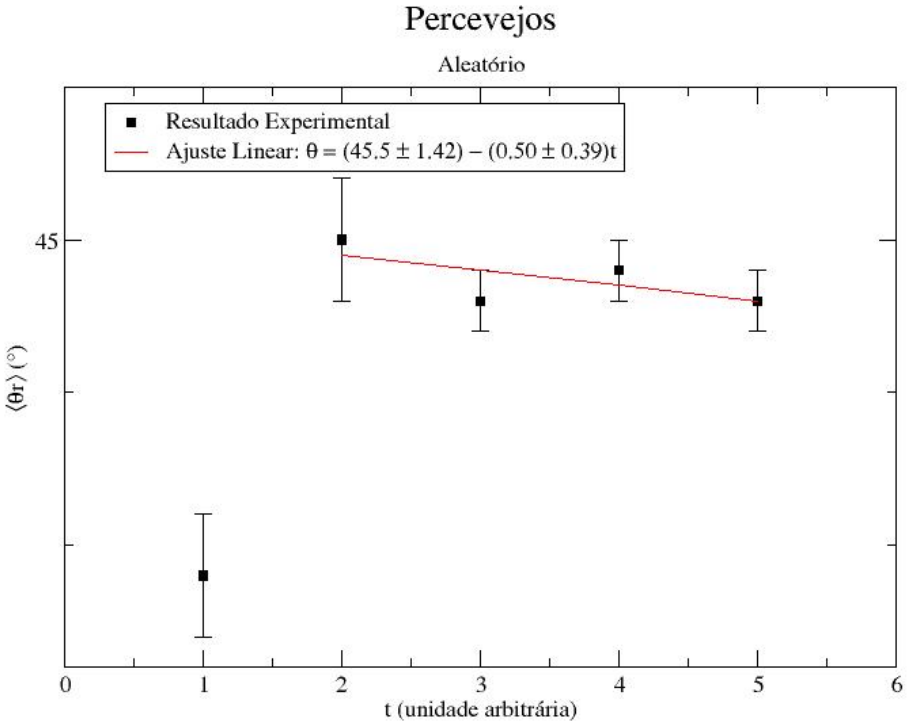


Figura 11

ISSN 2177-5052

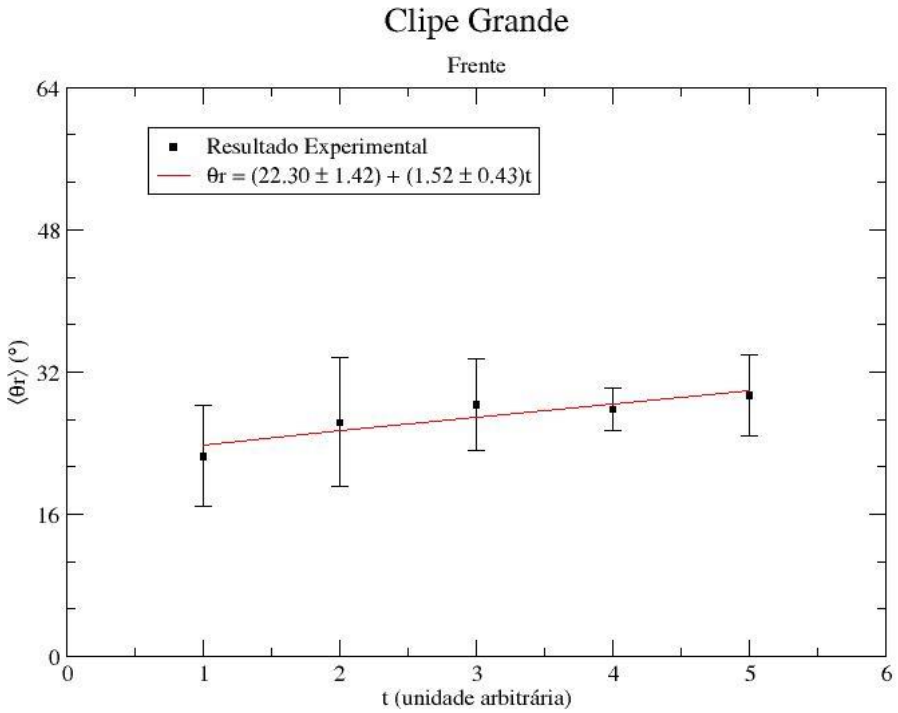


Figura 12

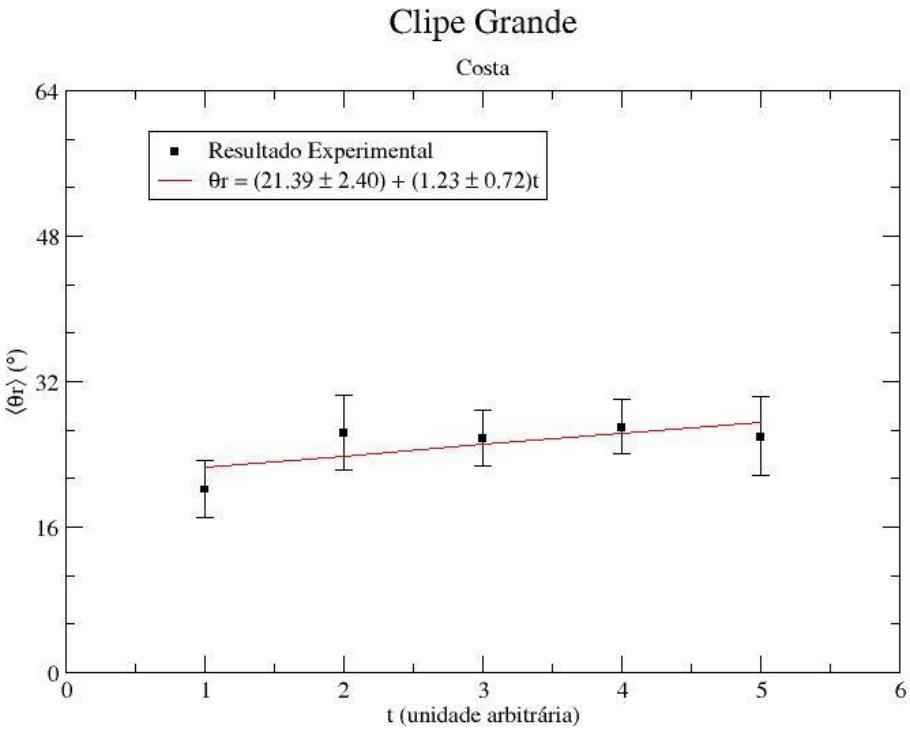


Figura 13

ISSN 2177-5052

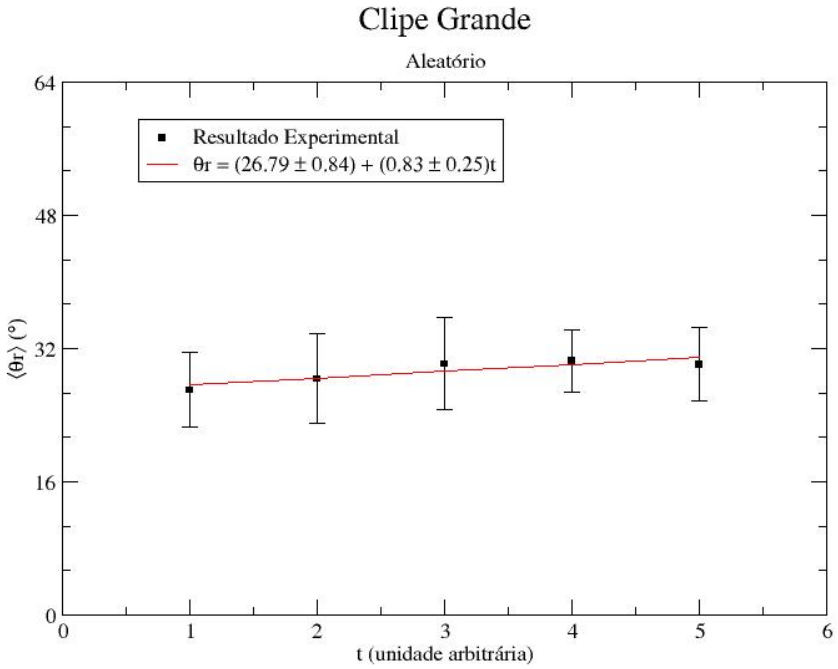


Figura 14

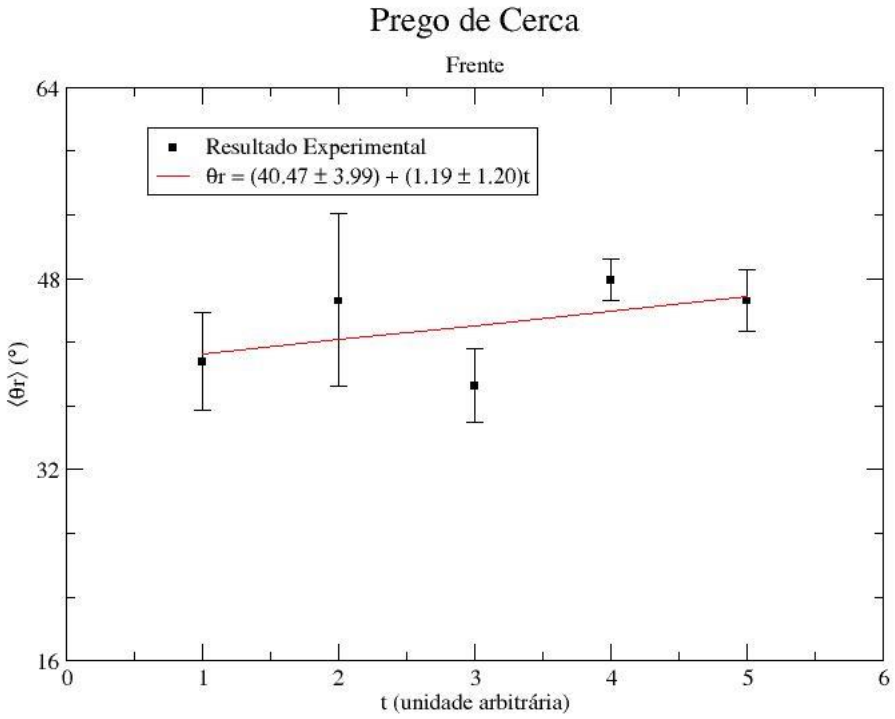


Figura 15

ISSN 2177-5052

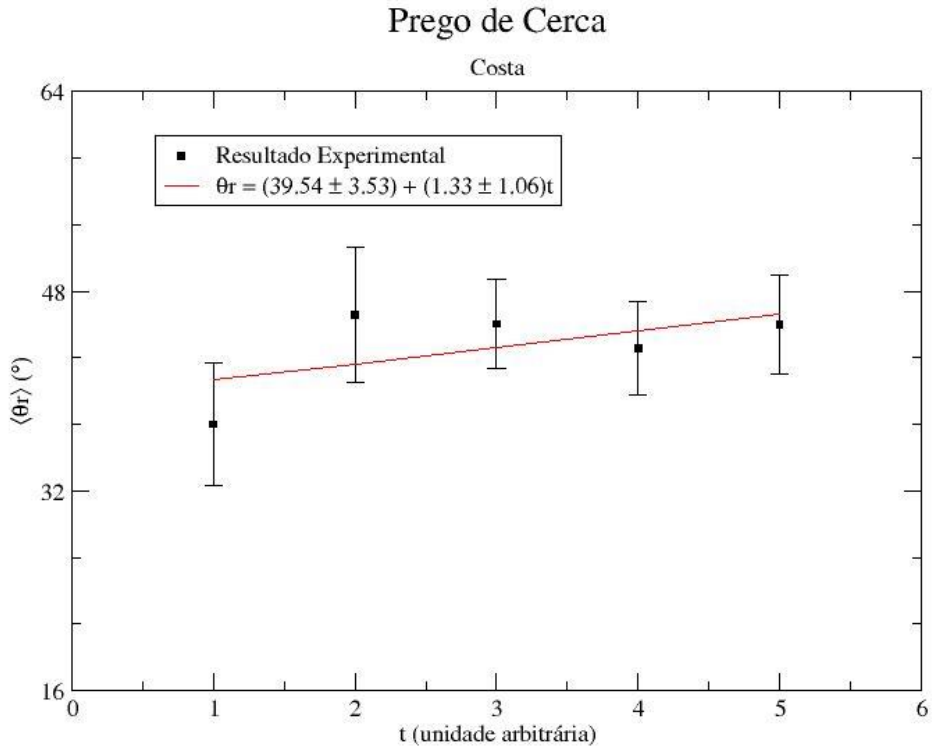


Figura 16

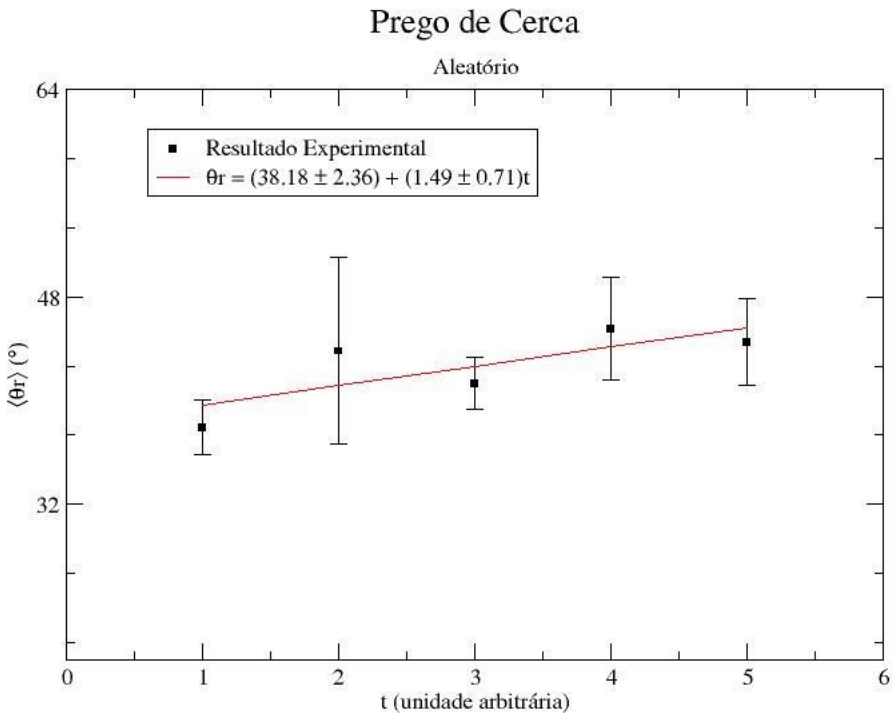


Figura 17

ISSN 2177-5052

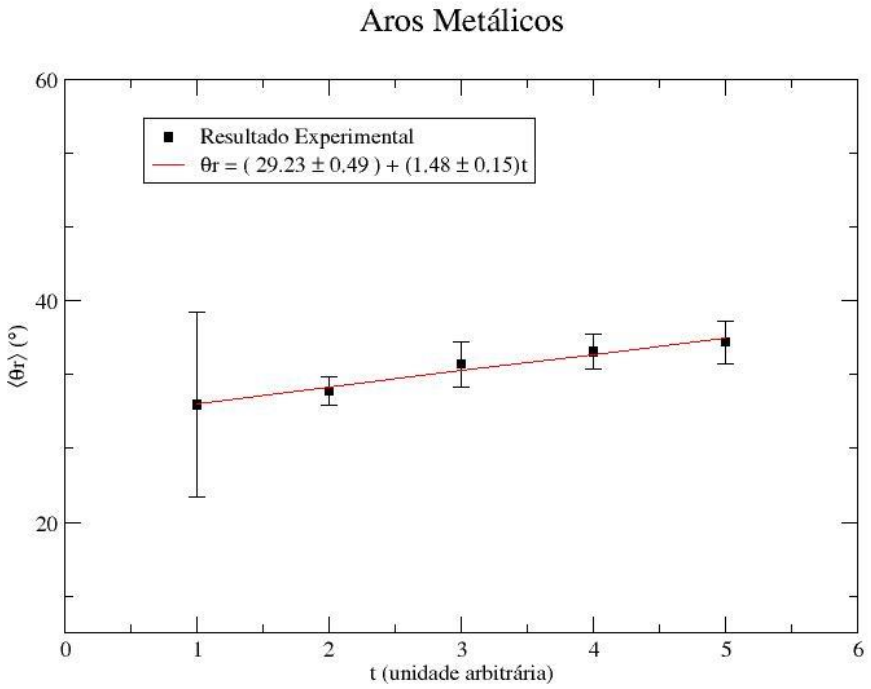


Figura 18

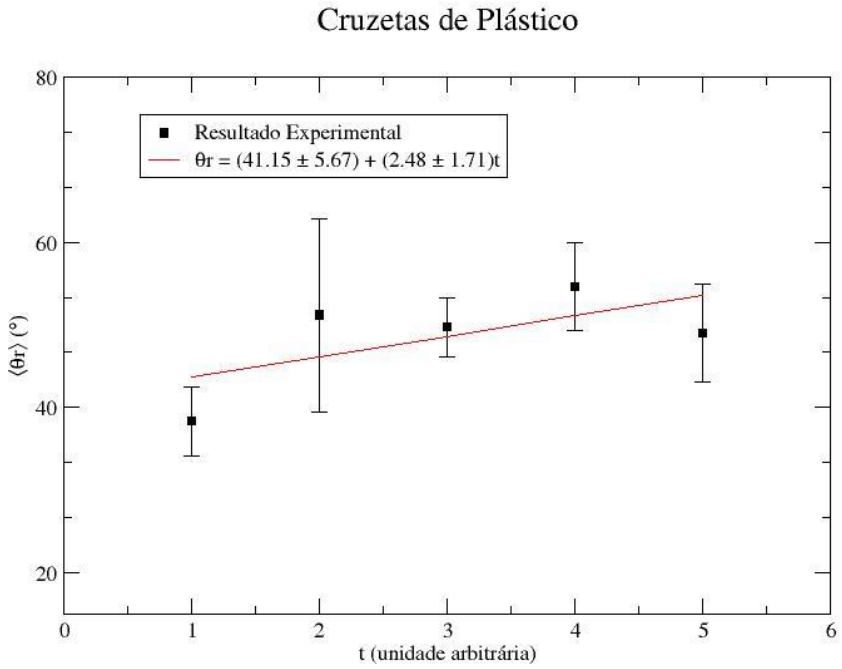


Figura 19

Discussão

Como se pode perceber pela Figura 5, esses materiais têm em geral padrões comuns facilitando a obtenção do ângulo de repouso. No caso dos aros metálicos, clipes, cruzetas de plástico, percevejos e pregos empilhados na célula de Helle Shaw comum, o formato também guarda um certo padrão, mas nota-se que a supefície da pilha é mais irregular, o que dificulta a determinação do ângulo.

Para todos os materiais empilhados ficou evidente a similaridade que as pilhas carregavam entre si. Como num fractal estatístico elas, apesar de não serem exatamente iguais, possuíam um certo número de características comuns que em geral divergiam pelo tipo de mateial empregado.[2]

Na Figura 5(e) pode-se notar uma das imagens que foi mais comum ao longo dos experimentos, vê-se uma pilha dividida em três regiões bem características, o topo, a região central e uma "cauda" na parte inferior.[1] O formato arredondado na parte superior se deve claramente à tranferência de momento para a pilha na queda do material, o formato das duas outras partes é devido as constantes avalanches que ocorrem ao longo do empilhamento. Estas avalanches ocorrem quando a pilha não suporta mais a energia "contida" nela, ou seja, está no seu grau máximo de instabilidade. Buscando a estabilidade, a pilha extravasa parte dessa energia potencial através de uma avalanche. Depois disso a pilha está novamente preparada para receber mais massa e portanto acumular mais energia.

Um maior "grau de anisotropia" do material empilhado implica numa maior irregularidade superficial apresentada pela pilha, o que se pode notar facilmente através do desvio de $\langle\theta r\rangle$, que foi maior para esses materiais mais anisotrópicos.

Através dos gráficos é evidente que o formato do material infuencia consideravelmente na inclinação $\langle\theta r\rangle$ da pilha, ou seja, materiais com anisotropias diferentes apresentam inclinações diferentes.

Considerações Finais

A partir dos resultados obtidos ao longo dos experimentos, e após a análise dos mesmos, pode-se concluir que:

O formato da pilha depende fortemente do material usado em sua preparação;

A anisotropia do material influencia no ⟨θr⟩ da pilha, ou seja, existe uma forte dependência entre o tipo de material empilhado e o ângulo de repouso da pilha em questão;

Quanto mais anisotrópico for o material maior é a sua inclinação, ou seja, a pilha é mais íngreme; O processo de formação comporta-se como um fractal estatístico.

Referências

A. Bunde and S. Havlin, *Fractals and disordered systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991); A. Bunde and S. Havlin, *Fractals in science*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994)

Bak, P.;C.Tang; e K. Wiesenfeld: *Self-organized criticality*. Physical Review A 38:364-374, 1988.

B. Drossel and F. Schwabl, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 1629-1632

Benoît Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature*, Freeman, New York (1983)

Bruce Elmegreen and Yuri Efremov, American Scientist 86 (1998) 264273

David Rail, *Theoretical aspects of brain function in fractal spacetime*, preprint (1998)

Didier Sornette, Anders Johansen and Ivan Dornic, J. Phys. I France 5 (1995) 325-335

E. T. Lu and R. J. Hamilton, Astrophys. Journal 380 (1991) L89

Frank Daerden and Carlo Vanderzande, Phys. Rev. E 53 (1996) 4723, cond-mat/9510127

H. Flyvbjerg, K. Sneppen and P. Bak, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 4087; J. de Boer, B. Derrida, H. Flyvbjerg, A. D. Jackson and T. Wettig, Phys. Rev. Lett 73 (1994) 906

H.M. Nussenzveig, in *Introdução à Complexidade*, J. Palis, in *Sistemas Caóticos e Sistemas Complexos*, P.M.C. Oliveira, in *Automatos Celulares*, M.A.F. Gomes, in *Criticalidade Auto-*

Organizada, editado por H.M. Nussenzveig, *Complexidade e Caos* (Editora UFRJ/COPEA, Rio de Janeiro, 2008.)

Lajos Nyikos, László Balázs and Robert Schiller, Fractals, 2 (1994) 143152

L. Oddershede, A. Meibom and J. Bohr, Europhys. Lett. 43 (1998) 598604

Per Bak, *How Nature works*, Springer-Verlag, New York (1996)

Per Bak, *Self-organised criticality in astrophysics*, in: J.M. Perdang and A. Lejeune, *Cellular automata – prospects in astrophysical applications*, World Scientific, Singapore (1993) 281

Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld, Phys. ver. Lett. 59 (1987) 381; Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld, Phys. Rev. A 38 (1988) 364

Per Bak and Kim Sneppen, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 4083

Roger Lewin, *Complexity: Life at the edge of chaos*, Macmillan Publishing Company (1993)

See e.g. the publicatons of the PIL group at HTTP://pil.phys.uniroma1.it/astro.html

S. S. Manna, J. Phys. A: Math. Gen. 24 (1991) L363-L369

Sole, R. V.; S. C. Manrubia.: *Are rainforests self-organized in a critical state*? Journal of Theoretical Biology 173:31-40, 1995.

Y. –C. Zhang, Phys. Ver. Lett. 63 (1989) 470

Y. Grasselli and H. Herrmann. Eur. Phys. J. B 10 (1999) 673-679.

TURCOTTE, Donald L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, 2ª edition, New York: Cambridge University Press, 1997;

Z. Olami, H. J. Feder and K. Christensen, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 1244